Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 29.04.2014.

Linearna algebra, apsolventski aprilski pismeni

1. Prva četri Lagranžova polinoma su 1, $1-t$, $2-4t+t^2$ i $6-18t+9t^2-t^3$. Pokazati da ovi polinomi formiraju bazu vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3$ je skup svih polinoma stepena manjim ili jednakim od 3). Odrediti polinom $q \in \mathcal{P}_3$ takav da je $[q]_{\mathcal{B}} = (-2,0,1,0)^\top$ ako je $\mathcal{B}$ baza sastavljena od četri data Lagranžova polinoma.

2. Dat je linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definisan na sljedeći način

$$A(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{bmatrix}$$

(a) Odrediti njegovu sliku i jezgru, te njihove baze.
(b) Ako je $\mathcal{L} = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y\}$ i

$$\mathcal{M} = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, A(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) \in \mathcal{L}\}$$

odrediti $\mathcal{M}$ kao i bazu za taj skup.

3. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao $\pi/3$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y = x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B} = \{(1,1)^\top, (1,-1)^\top\}$. Odredite koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

4. Odrediti ortogonalnu projekciju vektora $x = (-12,-13,5,2)^\top$ na prostor $\mathcal{M}$ ako je

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(s obzirom na standardni skalarni proizvod).

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Prva četri Lagranžova polinoma su 1, $1-t$, $2-4t+t^2$ i $6-18t+9t^2-t^3$. Pokazati da ovi polinomi formiraju bazu vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ (skup svih polinoma stepena manjim ili jednakim od 3). Odrediti polinom $g \in \mathcal{P}_3$ takav da $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ako je $\mathcal{B}$ baza sastavljena od četri data Lagranžova polinoma.

Rj. Da bi skup $\mathcal{B} = \{1, 1-t, 2-4t+t^2, 6-18t+9t^2-t^3\}$ bio baza vektorskog prostora potrebno je i dovoljno da je taj skup linearno nezavisan i da generiše svaki vektor $p \in \mathcal{P}_3$.

Pokažimo prvo linearnu nezavisnost. Posmatramo

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1-t) + \gamma(2-4t+t^2) + \delta(6-18t+9t^2-t^3) = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma + 6\delta &= 0 \\ -\beta - 4\gamma - 18\delta &= 0 \\ \gamma + 9\delta &= 0 \\ -\delta &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

$\Rightarrow$ skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan skup

Da li $\mathcal{B}$ generiše proizvoljan polinom $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 & a \\ 0 & -1 & -4 & -18 & b \\ 0 & 0 & 1 & 9 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\dots}{\overset{\text{osnovne red operacije}}{\sim}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a+b+2c+6d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b-4c-18d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c+9d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -d \end{array}\right]$$

Prema tome $\mathcal{B}$ generiše proizvoljni polinom $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ i vrijedi

$$p(t) = (a+b+2c+6d) \cdot 1 + (-b-4c-18d) \cdot (1-t) + (c+9d)(2-4t+t^2) + (-d) \cdot (6-18t+9t^2-t^3)$$

Odavde vidimo da za polinom $p(t)=a+bt+ct^2+dt^3$ vrijedi

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a+b+2c+6d \\ -b-4c-18d \\ c+9d \\ -d \end{pmatrix}$$

Da bi odredili polinom g za koji vrijedi $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ na osnovu $[p]_{\mathcal{B}}$ primjetimo da moramo imati

$$\begin{aligned} a+b+2c+6d &= -2 \\ -b-4c-18d &= 0 \qquad\qquad\qquad \Rightarrow -b=4 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; b=-4 \\ c+9d &= 1 \qquad\quad \Rightarrow \quad c=1 \\ -d &= 0 \quad \Rightarrow \quad d=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a-4+2+6\cdot 0=-2$$

$$a=0$$

Traženi polinom $g(t)$ je oblika

$$g(t)=-4t+t^2$$

(#) Dat je linearni operator $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisan na sljedeći način

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix}.$$

(a) Odrediti njegovu sliku i jezgru, te njihove baze.

(b) Ako je $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y \right\}$ i

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \right\}$$

odrediti $\mathcal{M}$ i bazu za njega.

Rj.

(a) $$im(A) = \left\{ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} z \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y=0,\ y-z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \qquad i\ z = y \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Time smo dobili da je

$$im(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Odredimo još baze za ova dva prostora. Prisjetimo se:

Ako je U bilo koja matrica u red ešelon obliku dobijena iz A tada

osnovne kolone u A generišu $\mathrm{im}(A)$

Kolone iz opšteg rješenja sistema $Ax=0$ generišu $\ker(A)$.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{osnovne red operacije}}{\sim} \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x+z=0$
$y-z=0$

Baza za $\mathrm{im}(A)$ je $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, a baza za $\ker(A)$ je $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(b) $\mathcal{L} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=y\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x,z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\mathcal{M} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, y,z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Prema tome $\mathcal{M} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, a baza za $\mathcal{M}$ je $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(#) Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao od $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y=x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Odrediti koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

Rj. Prisjetimo se

Matrica koordinata (matrica operatora)

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je definisana kao $m \times n$ matrica

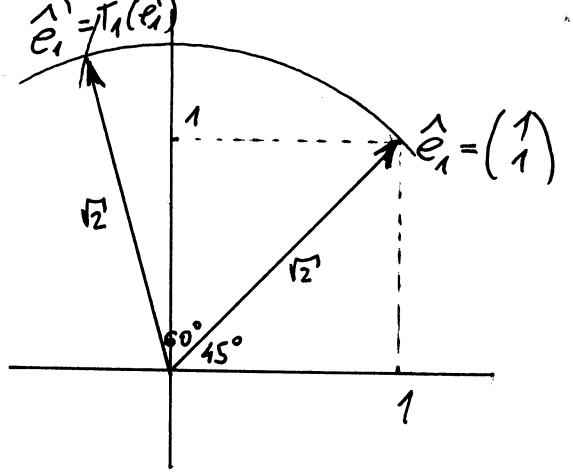
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, tada je u igri samo jedna baza, i koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Ako elemente baze $\mathcal{B}$ označimo sa $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ mi u stvari tražimo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(\vec{e}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo prvo rotaciju za $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru - i ovaj operator označimo sa T_1.

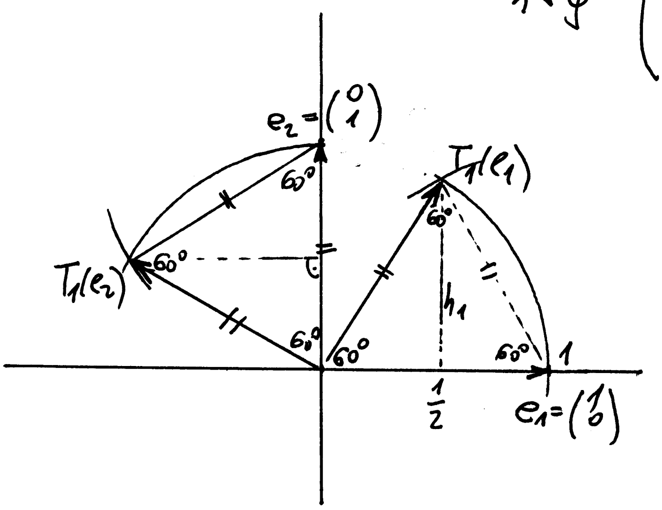


Primjetimo da je $T(\hat{e}_1)$ teško izračunati direktnim putem.

Da bi izračunali $T(\hat{e}_1)$ koristit ćemo standardnu bazu $\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ i sljedeću Teoremu:

Neka je $T \in \mathcal{L}(U, V)$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za U i V. Tada za $\forall u \in U$ imamo $[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}}$

$$\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad [T_1]_{\varphi} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T_1(e_1)]_{\varphi} & [T_1(e_2)]_{\varphi} \\ | & | \end{pmatrix}$$



$$h_1^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \qquad h_2^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

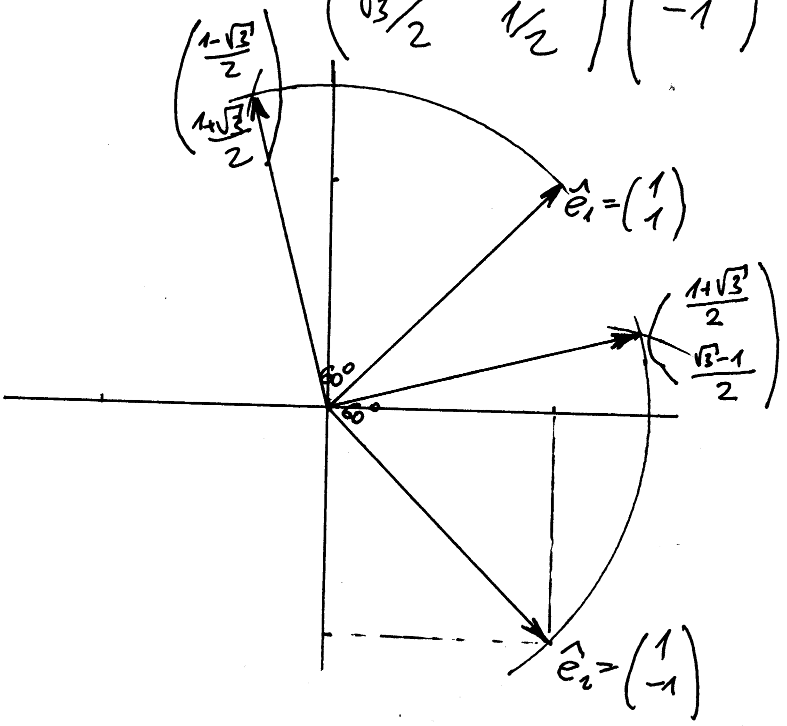
$$T_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = [T_1(e_1)]_{\varphi}$$

$$T_1(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = [T_1(e_2)]_{\varphi}$$

Prema tome $[T_1]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Sad imamo

$$[T_1(\hat{e}_1)]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[T(\hat{e}_2)\right]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$



Dalje nije teško pokazati da se proizvoljan vektor $v \doteq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ osnom simetrijom s osom u pravoj $y=x$ preslikava u vektor $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

Prema tome $T(\hat{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$$T(\hat{e}_2) = T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Odredimo još koordinate od $T(\hat{e}_1)$ i $T(\hat{e}_2)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[T(\hat{e}_1)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha - \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$+$

$$2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\beta = \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})}{2}$$

$$2\beta = \sqrt{3}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \alpha-\beta&=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ +\;\;&\\ \hline 2\alpha&=\frac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$2\alpha=\sqrt{3} \qquad \alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-:\quad 2\beta=\frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$2\beta=-1$$

$$\beta=-\frac{1}{2}$$

$$[T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ -1/2\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

tražena matrica operatora

Neka je v proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^2$ npr. $v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

$$v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\ldots=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}\end{pmatrix}$$

$$[T(v)]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}\cdot[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\alpha+\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{3}\\ (\alpha+\beta)\sqrt{3}-(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

tražene koordinate vektora $T(v)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

(#) Odrediti ortogonalnu projekciju vektora $x=\begin{pmatrix}-12\\-13\\5\\2\end{pmatrix}$ na prostor M ako je

$$M=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix}\right\}\subseteq \mathbb{R}^4$$

(s obzirom na standardni skalarni proizvod).

Rj. Prisjetimo se definicije ortogonalne projekcije:

<u>Za $v\in V$ neka je $v=m+n$, gdje je $m\in M$ i $n\in M^\perp$.</u>
<u>Vektor m nazivamo ortogonalna projekcija od v na M.</u>

Prisjetimo se i definicije ortogonalnog komplementa

<u>Za podskup M unitarnog prostora V ortogonalni komplement</u>
<u>$M^\perp$ od M je definisan kao skup svih vektora u V</u>
<u>koji su ortogonalni na svaki vektor u M. Tj.</u>

$$\underline{M^\perp=\{x\in V \mid \langle m,x\rangle=0 \quad \forall m\in M\}}$$

Prvo ćemo provjeriti da li je skup $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$ linearno nezavisan.

$$\begin{bmatrix}1&2\\-2&-3\\2&2\\-3&4\end{bmatrix}\overset{\text{osnovne red operacije}}{\sim}\ \dots\ \sim\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \text{dati skup je linearno nezavisan}$$

Sada tražimo vektore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ koji imaju osobinu da vrijedi

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle=0 \quad i \quad \left\langle\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle=0.$$ Odavde slijedi

$$a-2b+2c\;\;3d=0$$
$$2a-3b+2c+4d=0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{\text{osnovne red operacije}}{\sim} \cdots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\Rightarrow$ dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $c=t$, $d=s$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-17s \\ 2t-10s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

Prema tome $M^{\perp} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Sad nije teško primjetiti da vrijedi

$$\begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonalna projekcija vektora $x = \begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ na prostor M je $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.